ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

AN VĂN LONG

ĐIỀU KIỆN FRITZ JOHN VÀ KARUSH-KUHN-TUCKER CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ QUA DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 5/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

AN VĂN LONG

ĐIỀU KIỆN FRITZ JOHN VÀ KARUSH-KUHN-TUCKER CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTƠ QUA DƯỚI VI PHÂN SUY RỘNG

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
PGS.TS. ĐỖ VĂN LƯU

THÁI NGUYÊN, 5/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

$convM$	bao lồi của tập M
$clconvM$	bao lồi đóng của tập M
$coneM$	nón lồi sinh ra bởi M
X^*	không gian đối ngẫu tô pô của không gian X
$T(C, \overline{x})$	nón tiếp tuyến Clarke của C tại $\overline{x}$
$N(C, \overline{x})$	nón pháp tuyến Clarke của C tại $\overline{x}$
$f^-(\overline{x}, d)$	đạo hàm Dini dưới của f tại $\overline{x}$ theo phương d
$f^+(\overline{x}, d)$	đạo hàm Dini trên của f tại $\overline{x}$ theo phương d
$f^0(\overline{x}, d)$	đạo hàm suy rộng Clarke của f tại $\overline{x}$ theo phương d
$f^\Diamond(\overline{x}, d)$	đạo hàm Michel–Penot của f tại $\overline{x}$ theo phương d
$\partial f(\overline{x})$	dưới vi phân Clarke của f tại $\overline{x}$
$\partial^\Diamond f(\overline{x})$	dưới vi phân Michel–Penot của hàm f tại $\overline{x}$
$\partial^* f(\overline{x})$	dưới vi phân suy rộng trên của f tại $\overline{x}$
$\partial_* f(\overline{x})$	dưới vi phân suy rộng dưới của f tại $\overline{x}$
(VEP)	bài toán cân bằng vectơ
$(CVEP)$	bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc
$(CVVI)$	bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc
$(CVOP)$	bài toán tối ưu vectơ có ràng buộc

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Bài toán cân bằng vectơ bao gồm nhiều lớp bài toán trong tối ưu, trong đó có bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ. Điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ là một bộ phận quan trọng của tối ưu hóa.

Năm 1999, V. Jeyakummar và D.T. Luc [5] đã đưa ra khái niệm dưới vi phân suy rộng đóng không lồi (convexificator) cho hàm vô hướng. Dưới vi phân suy rộng là một tổng quát hóa của các khái niệm dưới vi phân Clarke, Michel - Penot, Mordukhovich, Treiman. Dưới vi phân suy rộng là một công cụ hữu hiệu để thiết lập các điều kiện tối ưu. Khi dẫn các điều kiện tối ưu qua các dưới vi phân người ta thường phải giả thiết hàm ràng buộc đẳng thức là khả vi Fréchet.

Đ.V. Lưu ([6], 2016) đã thiết lập các điều kiện cần Fritz John, các điều kiện cần và đủ Karush–Kuhn–Tucker cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc đẳng thức, bất đẳng thức và ràng buộc tập qua dưới vi phân suy rộng, trong đó hàm ràng buộc đẳng thức không khả vi Fréchet, mà chỉ là hàm Lipschitz địa phương. Đây là đề tài được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy, chúng tôi chọn đề tài:

"Điều kiện Fritz John và Karush–Kuhn–Tucker cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ qua dưới vi phân suy rộng".

2. Mục đích của đề tài

Luận văn trình bày các điều kiện cần Fritz John, các điều kiện cần và đủ Karush–Kuhn–Tucker cho nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ qua dưới vi phân suy rộng của Đ.V. Lưu [6] đăng trong tạp chí *J.*

Optim.Theory Appl. 171 (2016), 643 - 665. Một số áp dụng cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ và bài toán tối ưu vectơ cũng được trình bày trong luận văn.

3. Nội dung của luận văn

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục tài liệu tham khảo

Chương 1 " Dưới vi phân suy rộng" trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân suy rộng không compact cho hàm giá trị thực mở rộng, bao gồm: các khái niệm dưới vi phân suy rộng trên và dưới, dưới vi phân suy rộng chính quy và dưới vi phân suy rộng tối thiểu, các quy tắc tính dưới vi phân suy rộng, định lý giá trị trung bình.

Chương 2 "Điều kiện cần và điều kiện đủ" trình bày các điều kiện cần Fritz John và Karush–Kuhn–Tucker cho nghiệm hữu hiệu địa phương chính quy theo nghĩa Ioffe và các điều kiện đủ cho nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc trong không gian Banach của D. V. Luu [6].

Chương 3 "Áp dụng": sử dụng các kết quả đã trình bày trong chương 2, chúng tôi trình bày các điều kiện tối ưu cho bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ (CVVI) và bài toán tối ưu vectơ (CVOP).

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Đỗ Văn Lưu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người thầy hướng dẫn khoa học của mình, người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn tận tình và đầy trách nhiệm để tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả đã học tập được rất nhiều kiến thức chuyên ngành bổ ích cho công tác và nghiên cứu của bản thân. Nhân dịp này tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các thầy giáo, cô giáo đã tham gia giảng dạy lớp cao học Toán K10Y, nhà trường và các phòng chức năng của Trường, khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập tại trường.

Cuối cùng tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã động viên, ủng hộ và tạo mọi điều kiện cho tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu và học tập.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2018

Tác giả luận văn

An Văn Long

Chương 1

Dưới vi phân suy rộng

Chương 1 trình bày một số kiến thức cơ bản về dưới vi phân suy rộng không compact cho hàm giá trị thực mở rộng, bao gồm: các khái niệm dưới vi phân suy rộng trên và dưới, dưới vi phân suy rộng chính quy và dưới vi phân suy rộng tối thiểu, các quy tắc tính dưới vi phân suy rộng, định lý giá trị trung bình. Các kiến thức trình bày trong chương này được tham khảo trong [1], [5].

1.1. Dưới vi phân suy rộng và các dưới vi phân Clarke, Michel–Penot

Trong phần này, ta trình bày khái niệm dưới vi phân suy rộng, dưới vi phân suy rộng chính quy dưới và trên cho hàm giá trị thực mở rộng.

Giả sử X là một không gian Banach và $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm giá trị thực mở rộng, trong đó $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Không gian đối ngẫu của X được kí hiệu bởi X^* và X^* được trang bị tô pô yếu*. Bao lồi và bao lồi đóng của tập A trong X^* được kí hiệu tương ứng bởi $conv(A)$ và $\overline{conv}(A)$. Giả sử $x \in X$ tại đó f là hữu hạn. Đạo hàm theo phương Dini dưới và trên của f tại x theo phương v được định nghĩa tương ứng bởi

$$f^-(x,v) := \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

$$f^+(x,v) := \limsup_{t \downarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(xt)}{t}.$$

Trong trường hợp $f^+(\overline{x};v) = f^-(\overline{x};v)$, giá trị chung của chúng được ký hiệu bởi $f'(\overline{x};v)$ và được gọi là đạo hàm Dini của f tại $\overline{x}$ theo phương v. Hàm f được gọi là khả vi Dini được tại x nếu đạo hàm Dini tại $\overline{x}$ tồn tại theo tất cả các phương.

Theo [5], hàm $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng trên $\partial^* f(x)$ tại x nếu $\partial^* f(x) \subset X^*$ là đóng yếu* và với mỗi $v \in X$,

$$f^-(x,v) \leq \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Hàm $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng dưới $\partial_* f(x)$ tại x nếu $\partial_* f(x) \subset X^*$ đóng yếu* và với mỗi $v \in X$,

$$f^+(x,v) \geq \inf_{x^* \in \partial_* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Hàm $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là có dưới vi phân suy rộng $\partial^* f(x)$ tại x nếu nó đồng thời là dưới vi phân suy rộng dưới và trên của hàm f tại x. Điều này có nghĩa là hàm f có dưới vi phân suy rộng thì $\partial^* f(x)$ là đóng yếu* và với mỗi $v \in X$,

$$f^-(x,v) \leq \sup_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle ,$$

$$f^+(x,v) \geq \inf_{x^* \in \partial^* f(x)} \langle x^*, v \rangle .$$

Chú ý rằng dưới vi phân suy rộng không nhất thiết là lồi hoặc compắc yếu*. Điều này cho phép ta áp dụng được cho một lớp rộng bài toán với các hàm liên tục không trơn.

Ví dụ 1.1 Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{nếu } x \geq 0, \\ -\sqrt{-x}, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hàm f có dưới vi phân suy rộng không compắc tại 0 có dạng $[\alpha, \infty)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

Hàm f được cho là có dưới vi phân suy rộng nửa chính quy trên (dưới) $\partial^* f(\overline{x})$ (tương ứng $\partial_* f(\overline{x})$) tại $\overline{x}$ nếu $\partial^* f(\overline{x})$ (tương ứng $\partial_* f(\overline{x})$) đóng yếu* và với mọi $v \in X$,

$$f^+(\overline{x};v) \leqslant \sup_{\xi \in \partial^* f(\overline{x})} \langle \xi, v \rangle$$

$$\Big(\text{tương ứng } f^{-}(\overline{x};v) \geqslant \inf_{\xi\in\partial_* f(\overline{x})} \langle \xi, v\rangle\Big).$$

Giả sử $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ là hữu hạn tại điểm $x \in X$. Nếu f là nửa liên tục dưới tại x thì đạo hàm trên Clarke–Rockafellar của f tại x theo phương v được định nghĩa bởi

$$f^{\uparrow}(x,v) = \limsup_{\substack{x'\to_f x\\ t\downarrow 0}} \inf_{v'\to v} \frac{f\left(x'+tv'\right)-f\left(x'\right)}{t},$$

trong đó $x' \to_f x$ có nghĩa là $x' \to x$ và $f(x') \to f(x)$.

Nếu f là nửa liên tục trên tại x thì đạo hàm dưới Clarke–Rockafellar của f tại x với phương v được xác định bởi

$$f^{\downarrow}(x,v) = \liminf_{\substack{x'\to_f x\\ t\downarrow 0}} \sup_{v'\to v} \frac{f(x'+tv')-f(x')}{t}.$$

Nếu f liên tục tại x thì $x' \to_f x$ trong định nghĩa trên có thể viết đơn giản là $x' \to x$. Các dưới vi phân suy rộng trên và dưới của f tại x được cho bởi công thức:

$$\partial^{\uparrow} f(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\uparrow}(x,v), \forall v \in X\right\},$$

$$\partial^{\downarrow} f(x) = \left\{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^{\downarrow}(x,v), \forall v \in X\right\}.$$

Nếu $f^{\uparrow}(x,0) > -\infty$ thì $\partial^{\uparrow} f(x)$ là tập con đóng yếu*, lồi, khác rỗng của X^* và với mỗi $v \in X$,

$$f^{\uparrow}(x,v) = \sup_{x^*\in\partial^{\uparrow} f(x)} \langle x^*, v\rangle .$$

Tương tự, nếu $f^{\downarrow}(x,0) < \infty$ thì $\partial^{\downarrow} f(x)$ là tập con đóng yếu*, lồi, khác rỗng của X^* và với mỗi $v \in X$,

$$f^{\downarrow}(x,v) = \inf_{x^*\in\partial^{\downarrow} f(x)} \langle x^*, v\rangle .$$

Nếu f là Lipschitz địa phương tại x thì

$$f^{\uparrow}(x;v) = f^{\circ}(x,v),$$

$$f^{\downarrow}(x;v) = f_{\circ}(x,v),$$